VECTORES EN EL ESPACIO, RECTAS EN EL ESPACIO, PROYECCION Y PLANOS.

1.- Sea los vectores.

$$\vec{a} = \left(2, -4, \sqrt{2}\right) \quad ; \quad \vec{b} = (0,2,1) \quad ; \vec{c} = i + 3k \quad ; \quad \vec{d} = -i + 3j - 6k$$

Determine:

a.- $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b.- $\vec{d}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{c}$

c.- $\vec{b}(\vec{a} + \vec{d})$

d.- $\vec{c} - \vec{d} + \vec{a}$

e.- $\vec{c}.\vec{a} - \vec{d}.\vec{c}$

Halle el vector UNITARIO a cada uno de los vectores dado en el problema.

2.- Determine el producto cruz para el par de los vectores dados a continuación.

a.- $\vec{u} = -3i - 2j + k$ $\quad$ $\vec{v} = -i + 7j - 3k$

b.- $\vec{u} = 2i - 3j + 5k$ $\quad$ $\vec{v} = 3i - j - k$

c.- $\vec{u} = aj + bk$ $\quad$ $\vec{v} = ci + dk$

d.- $\vec{u} = 10i + 7j - 3k$ $\quad$ $\vec{v} = -3i + 4j - 3k$

3.- Determine dos vectores unitarios ortogonales a $\vec{u} = 2i - 3j$ y $\vec{v} = 4j + 3k$

4.- Determine el valor del seno del ángulo entre los vectores $\vec{u} = 2i + j - k$

$\vec{v} = -3i - 2j + 4k$

5.- Calcule el volumen generado por los vectores $\vec{u} = (2, -1,0)$ $\vec{v} = (1,0,4)$

$\vec{w} = (-1,32)$

Y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ calcule ahora el volumen generado por los vectores

$A\vec{u}, A\vec{v}. A\vec{w}$

6.- Encuentre la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétrica, y las simétricas de la recta indicada.

a.- $(-4,1,3) y\ (2,0,-4)$

b.- $(7,1,3)\ y\ (-1,-2,3)$

c.- $(2,2,1) y\ es\ paralela\ a\ 2i-j-k$

d.- $(-2,3,-2)\ y\ es\ ortogonal\ a\ la\ recta -3j+7k$

7.- Encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto pedido.

a.- $\frac{x+2}{-3}=\frac{(y-1)}{4}=\frac{z}{-5}$; $\frac{x-3}{7}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-8}{3}$; $P(1,-3,2)$

b.- $\begin{cases} x=3-2t \\ y=4+3t \\ z=-7+5t \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2+4s \\ y=3-2s \\ z=3+s \end{cases}$; $P(-2,3,4)$

8.- Calcule la distancia que separa a las siguientes rectas.

a.- $\frac{x-2}{3}=\frac{(y-5)}{2}=\frac{z-1}{-1}$; $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-5}{4}=z+2$

b.- $\frac{x+2}{3}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-2}{4}$; $\frac{(x-1)}{-3}=\frac{y+2}{4}=(z+1)$

9.- Encuentre la ecuación del plano.

a.- $P(-4,-7,5)\ \vec{n}=-3i-4j+k$

b.- $P(-3,11,2)\ \vec{n}=4i+j-7k$

c.- $Contiene\ a\ A(2,3,-2)\ B(4,-1,-1)\ C(3,1,2)$

d.- $Contiene\ a\ A(-7,1,0)\ B(2,-1,3)\ C(4,1,6)$

10.- Encuentre la ecuación de la recta que resulta al interceptar los planos.

a.- $\pi_1=x-y+z=2\quad \pi_2=2x-3y+4z=7$

b.- $\pi_1=-2x-y+17z=4\quad \pi_2=2x-y-z=-7$

c.- $\pi_1=2x-y+z=3\quad \pi_2=x+y+z=3$

11.- Determine la distancia del punto dado al plano de ecuación.

a.- $A(-3,0,2)$ $\pi \quad = -3x + y - 5z = 0$

b.- $A(-7,-2,-1)$ $\pi \quad = -2x + 8z = -5$

c.- $A(4,0,1)$ $\pi \quad = 2x - y + 8z = 3$

12.- Calcule $proy_v u$

a.- $\vec{u} = 14i + 2k$; $\vec{v} = i + j$

b.- $\vec{u} = 2i - 5j$; $\vec{v} = -3i - 7j$

c.- $\vec{u} = 2i - 4j + k$; $\vec{v} = i - 2j + 3k$

d.- $\vec{u} = -3i + 2j + 5k$; $\vec{v} = 2i - 4j + k$

ESPACIO VECTORIAL. SUBESPACIO, COMBINANCION LINEAL, INDEPENDENCIA LINEAL BASES Y DIMENSIONES.

ESPACIO VECTORIAL.

1.- Diga si el conjunto V es un espacio vectorial con la suma y producto definido por:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$k(a, b) = (a, kb)$

2.- Sea R^3 con la suma usual y con el producto por un escalar como se indica en cada caso. Pruebe si es un espacio vectorial, en caso negativo justifique.

a.- $\delta(x, y, z) = (\delta x, \delta y, z)$

b.- $\delta(x, y, z) = (0,0,0)$

c.- $\delta(x, y, z) = (3\delta x, 3\delta y, 3\delta z)$

3.- Sea el conjunto R^2 se define la operación suma y multiplicación por un escalar como:

$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w + 1)$

$\delta(x, y) = (\delta x, \delta y + \delta - 1)$

Diga si R^2 es un espacio vectorial.

4.- Sea el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar usual, diga si es un espacio vectorial.

5.- Sea el conjunto de R^2 con la suma y la multiplicación por un escalar definida por

$(x, y) + (z, w) = (x + z + 1, y + w + 1)$

$\delta(x, y) = (\delta + \delta x - 1, \delta + \delta y - 1)$

6.- Sea R^2 y considere las siguientes operaciones de suma y multiplicación por un escalar. Diga si es un espacio vectorial.

$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$

$\delta(x, y) = (\delta^2 x, \delta y)$

7.- Sea $V = \{(x, y) \ / \ a, b \in R\}$. Demuestre que V es un espacio vectorial donde se define la suma y la multiplicación por un escalar tal que:

$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$

$\delta(x, y) = (x^{\delta}, y^{\delta})$

8.- Sea R^2 y considere las siguientes operaciones

$(x, y) + (z, w) = (0,0)$

$\delta(x, y) = (\delta x, \delta y)$

Diga si es un espacio vectorial.

SUBESPACIOS.

9.- Sea R^3 un espacio vectorial, entonces se define

$W = \{(a, b, c) \ / \ a \in R, b = c = 0\}$

¿Es W un subespacio vectorial de R^3?

10.- Decida si W es un espacio de R^3 en cada uno de los casos.

$a. - \ W = \{(a, b, c) \ / \ a = 2b \ , c \in R\}$

$b. - \ W = \{(a, b, c) \ / \ a \leq b \leq c\}$

$c. - \ W = \{(a, b, c) \ / \ ab = 0\}$

11.- Si W, U son subespacios vectoriales de V entonces $W \cap U$ es un subespacio también.

12.- Sea $W = \{p(x) = a + (a - b)x^2 + bx^3\}$ Demuestre que W es un subespacio vectorial de $P_3(x)$

13.- Decida si el conjunto dado en cada caso es un subespacio vectorial.

$a. - \ A = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a + b = 0\right\} \in M(2)$

$b. - \ B = \{(x, y, z) \ / \ z - 2y = 2\} \in R^3$

14.- Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \ / \ 2a + c = b\}$ Demuestre que W es un subespacio vectorial de $P_2(x)$

15.- Se define los siguientes conjuntos de R^3

$a.- \ U = \{(a, b, c) \ / \ a + b + c \leq 1\}$

$b.- \ W = \ \{(x, y, z)/z = 0 \ y \ x^2 + y^2 \leq 0\}$

$c.- \ P = \{(x, y, z) \ / \ x + 2y = 0 \ y \ y + z = 8\}$

Es U,W,P subespacios vectorial de R^3

16.- Determine si los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios.

$a.- \ A = \{(x, y, z) \ /x = 0\}$

$b.- \ B = \{(x, y, z) \ /z - 2y = 0\}$

$c.- \ C = \{(x, y, z)/ \ z - 2y = 2\}$

$d.- \ D = \{(x, y, z) \ / \ x^2 + y^2 + c^2 = 0\}$

17.- Sea V=M(2) el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V?

$a.- A = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, b \in R\right\}$

$b.- B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \ / \ a, b \in R\right\}$

$c.- \ C = \ \{A \in V \ / \det(A) = 0\}$

$d.- \ D = \ \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ a + b = 0\right\}$

18.- Sea V=M(n) el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n ¿Cuál de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V?

$a.- \ A = \ \{A \in V \ / \ A = 3A^t\}$

$b.- \ B = \ \{A \in V \ / \ AC = CA, C \in V\}$

$c.- \ C = \ \ \{A \in V \ / \ A \ es \ simétrica\}$

COMBINACION LINEAL Y CONJUNTO GENERADOR.

19.- Determine si el vector $v = (1,7,-4) \in R^3$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $A = \{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (1,3,-2)$; $v_2 = (2,-1,-1)$

20.- Considere $A = \{v_1, v_2\} \in R^4$ donde $v_1 = (1,2,1,1)$; $v_2 = (-1,1,2,2)$. Determine si los siguientes vectores pertenecen a A

a.- $v = (4,4,0,7)$ b.- $w = (2,1,0,3)$ c.- $r = (-2,6,-8,-8)$

d.- $s = (4,4,0,0)$ e.- $u = (4,11,7,7)$ f.- $t = (-1,4,5,5)$

21.- Considere $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \ / \ c = a - d \ , b = 0\}$ es un subespacio de P_3 Determine un conjunto generador.

22.- Determine si los conjuntos siguientes G_1 y G_2 generan al mismo espacio vectorial $G_1 = \{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ y $G_2 = \{(1,1,-2), (2,1,-3), (0,1,-1)\}$

23.- Determinar si los siguientes vectores generan a R^4

a.- $(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$

b.- $(1,3,-5,0), (-2,10,0), (0,2,1,-1), (1,-4,5,0)$

c.- $(1,0,-2,5), (2,1,0,-1), (1,1,2,1)$

24.- Determine si el conjunto dado generan al espacio vectorial señalado.

$a. -(1,2), (3,4) \quad EV = R^2$

$b. - \ (1,1), (2,2), (5,5) \ \ EV = R^2$

$c. - \ (1,-1,2), (1,1,2), (0,0,1) \ \ EV = R^3$

$d. - \ (1-x), (3-x^2) \ \ EV = P_2$

$e. - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad EV = M_{22}$

$f. - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \quad EV = M_{22}$

INDEPENDENCIA LINEAL Y DEPENDENCIA LINEAL.

25.- Determine si los siguientes vectores son o no linealmente independientes.

$a. - \{(6,1,1), (-2,0,0); (4,1,1)\}\ en\ R^3$

$b. - \{(1,2,-1), (1,0,2), (2,4,-2)\}\ en\ R^3$

26.- Si $\{u, v, w\} \in V$ es LI demuestre que $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ es LI

27.- Determine cuál(es) de los siguientes conjuntos dados es o no un conjunto linealmente independiente.

$a. -\ A = \{(1,1,0,1), (1,-1,1,1), (2,2,1,2), (0,1,0,0)\} \in R^4$

$b. -\ B = \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1), (1,1,1,1)\} \in R^4$

$c. -\ C = \{(t^3 - 4t^4 + 2t + 3); (t^3 + 2t^2 - 4t + 1); (2t^3 - t^2 + 3t - 5)\} \in P_3$

28.- Sea $A = \{f(t), g(t), h(t)\} \in V$ donde V es el espacio vectorial $P_2(t)$, tal que $f(t) = 2t^2 + 3t + 1,\ g(t) = -t^2 + at + 2\ h(t) = 2t^2 + 3t + a - 5.$ Determine a∈R para que A sea un conjunto linealmente independiente.

29.- Sea $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \in R^3$. Demuestre que A es un conjunto linealmente dependiente y que cualquier subconjunto de A con tres elementos es un conjunto linealmente independiente.

30.- Determine si el conjunto de vectores dado es LI o LD.

$a. -\ En\ P_2\colon\ (1-x), (1+x), (x^2)$

$b. - En\ P_3\colon\ (x); (x^2 - x); (x^3 - x)$

$c. - En\ P_3\colon\ (2x), (x^3 - 3); (1 + x - 4x^3); (x^3 + 18x - 9)$

$d. -\ En\ M_{22}\colon\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$

BASE Y DIMENSIONES

31.- Verifique que $B = \{(1,5); (0,3)\}$ es base de R^2

32.- Sea V un espacio vectorial. Si $A = \{a, b, c\} \in V$ es base de V, demuestre que $N = \{(a+b+c); (a); (a+c)\}$ también es base de V.

33.- Halle la dimensión del espacio vectorial conformado por las matrices M_{22}

34.- Sea $A = \langle(1,0,-5); (0,1,1)\rangle$ y $B = \{(x,y,z) / x - 2y + z = 0\}$ subespacio vectorial de R^3. Determine una base para $A \cap B$

35.- Demuestre que $A = \{(2,1,0), (0,1,2), (1,0,3)\} \in R^3$ es base.

36.- Sea $A = \left\{\begin{pmatrix} 2a & a & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ / \ a, c \in R\right\}$ determine la dimensión de A.

37.- Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \ / \ 2a + c = b\}$

a.- Demuestre que W es subespacio de P_2

b.- Determine la dimensión de W

38.- Encuentre una base del conjunto solución del sistema

$S = \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y determine su dimensión.

39.- ¿Para qué valores de a∈R es una base los siguientes conjuntos?

$a.- \ A = \{(2,3,4); (6,7,8); (4,5-a,4)\} \ \in R^3$

$b.- \ B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ a+1 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} \in M_{22}$

40.- Sean $U = \{(x,y,z) / x + 3y - 5z = 0\}$, $W = \{(x,y,z) / x - y + 2z = 0\}$

a.- Demostrar que U y W son subconjunto de R^3

b.- Encuentre una base para cada subespacio

c.- Encuentre una base para $U \cap W$

41.- Sea $A = \{(1,2,1,1), (-1,1,2,2)\} \in R^4$

a.- ¿ $v_1 = (3,2,4,5)$ $v_2 = (1,3,2,2)$ $v_3 = (3,-3,6,6) \in A$?

b.- Encuentre una expresión funcional para los valores que pertenecen al espacio generado por el conjunto A.

42.- Hallar una base del subespacio vectorial F formado por las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

50

REPASO PARA EL SEGUNDO PARCIAL.

1.- Sea π el plano que pasa por los puntos, $P(2,3,-1), Q(1,0,-1) y\ R(0,-2,1)$ y sea $\pi_1: 2x - 2y + 4z = 6$

a.- Demuestre que ambos planos son no paralelos.

b.- Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que resulta $\pi \cap \pi_1$

c.- ¿El punto $(5,2,-1)$ pertenece a L?

2.- Sea el conjunto R^2 con las siguientes operaciones es un espacio vectorial:

$$(x,y) + (z,w) = (1 + x + z, 2 + y + w)$$

$$k(x,y) = (k + kx - 1, 2k + ky - 2)$$

Diga si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de dicho espacio

a.- $U = \{(x,y) \ / \ x = y\}$

b.- $V = \{(x,y) \ / \ y = 2x\}$

3.- Sea los vectores $\vec{u} = (-7, \alpha, 8, \beta)$ $\vec{v} = (-4,2,-3,1)$ y $\vec{w} = (1,3,-1,5)$ halle los valores de α y β para que los vectores sean dependientes.

4.- Sea las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1:\ x - 2 = \frac{y-2}{3} = -(z+1)$$

$$L_2:\ -(x-2) = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}$$

a.) Halle la intersección de las dos rectas.

b.) Calcule el valor coseno del ángulo que forman las dos rectas.

c.) De una ecuación que contiene a las dos rectas.

5.- Determine los valores r ЄR tal que los vectores $\vec{u} = (0,-1,1)$ $\vec{v} = (1,1,0)\ y\ \vec{w} = (4,-2,2r)$ no sean coplanares.

$$u.(v\ x\ w) = 0$$

6.- Sean

$$H_1 = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0\}$$

$$H_2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0\}$$

a.- Demuestre que $H_1 + H_2 = \{u + v:\ u \in H_1 \quad v \in H_2\}$ es un subespacio vectorial de R^3

b.-Hallar la dimensión de $H_1 + H_2$

7.- Determinar si el conjunto de polinomios $\{-x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2\} \subset P_2$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

8.- En P_3 decida si los vectores $\{(t), (1 - t), (2t^2 + t - 6)\}$ son linealmente independiente.

9.- Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3:\ 2x - y + 3z = 0 \right\}$

a.- Demuestre que H es subespacio de R^3

b.- Halle una base para H.

c.- Halle dimensión de H.

10.- Sea las rectas de ecuaciones

$$L_1 = \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad y \quad L_2 = (x - 3) = (y - 2) = \frac{z - 1}{3}$$

Halle la ecuación del plano que contiene ambas rectas (si existe)

11.- Sea $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3 : b - d = 0\}$

a.- Demuestre que W es un subespacio vectorial de P_3

b.- Halle una base para W.

12.- En P_3 determinar si $v_1 = 1 + 2t + t^3 \quad v_2 = 1 + t \quad v_3 = 1 + 4t + 3t^3$ son LI o LD.

S2

13.- Halle todos los vectores perpendiculares a u y unitarios.

$$u = (3{,}4{,}12)$$

14.- Sean $\pi_1: x - y + z = 0 \;\; y \;\; \pi_2: 2x + t - 4z = 5$

a.- Halle la recta que resulta a interceptar los planos

b.- Hallar la ecuación del plano perpendicular a los planos dados y que pasa por (4,0-2)

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1,-1,1) es perpendicular a la recta de ecuación $l: 3x = 2y = z$ y paralela al plano $\alpha: x + y - z = 0$

16.- Halle los valores de k para que $\vec{u} = (1, -2, k)$; $\vec{v} = (3{,}0, -2)$; $\vec{w} = (2{,}1, -5)$ para que u sea combinación lineal.

17.- Sea $W = \left\{A \in M_{22}\text{: } A\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} A\right\}$ demuestre que es un subespacio vectorial y además halle la dimensión de dicho subespacio.

18.- Sea $A(2{,}4{,}6)$; $B(6{,}2{,}8)$; $C(-2{,}2{,}0)$ sea L=AB; halle $CP \perp L$

19.- Sea $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$

a.- Halle p para que A sea invertible

b.- para p=2 hallar la adjunta de A

20.- Encuentre una base del conjunto solución del sistema

$$S = \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$ y determine su dimensión.